

Mathématiques, Physique et Technologies au XXème siècle

André-Marie Tremblay

ABSTRACT. Les mathématiques ont joué un rôle crucial en physique depuis Newton. Au XXIème siècle, comme dans les siècles précédents, les mathématiques ont fourni non seulement des moyens de calcul mais aussi un langage pour développer les concepts qui permettent de comprendre la nature de la matière à toutes les échelles. Au XXIème siècle, l'algèbre linéaire et ses extensions, ont permis de formuler succinctement les lois du monde quantique. En y joignant des concepts de théorie des probabilités, le comportement de collections de particules devient clair. Ces connaissances ont permis de maîtriser le comportement des électrons dans les solides pour créer, entre autres, le transistor, qui est le moteur de toute l'électronique moderne, de la montre bracelet à l'ordinateur personnel. Les éléments magnétiques de ce même ordinateur sont des matériaux dont les électrons interagissent collectivement. Cet exposé esquisse comment les mathématiques agissent en synergie avec la physique pour permettre d'énoncer les principes et concepts qui sont à la base de la technologie de la fin de notre siècle.

1. Introduction

Par quel processus complexe la connaissance est-elle créée et appliquée dans des objets technologiques? Sans prétendre comprendre ce processus, je me permets de tracer le schéma simpliste de la figure 1. En supposant qu'on puisse tracer trois secteurs disjoints, soit mathématiques, physique et technologie (ou ingénierie), on peut ensuite se demander comment ces activités s'influencent mutuellement. Il est clair que la technologie donne quelques outils aux mathématiciens, surtout les ordinateurs, et qu'elle en donne beaucoup aux physiciens sous la forme d'un grand nombre d'instruments de mesure ou de calcul: microscopes, spectromètres, ordinateurs... En retour, les mathématiques aident au développement de la technologie directement, que ce soit à l'aide des statistiques, de la logique Booléenne, du développement de langages informatiques, de l'utilisation de lois formulées sous formes mathématiques. Mais il y a une autre route que les mathématiques emploient pour contribuer au développement de la technologie et cette route passe par la physique. En effet, les lois et même les concepts de la physique qui servent au développement de la technologie sont de plus en plus dépendants des mathématiques

Dans ces quelques pages, j'essaierai de suivre les développements de la physique au XXème siècle qui, à mon avis, ont le plus contribué au développement d'outils

L'auteur remercie les organismes suivants: CRSNG, FCAR et l'Institut canadien de recherches avancées.

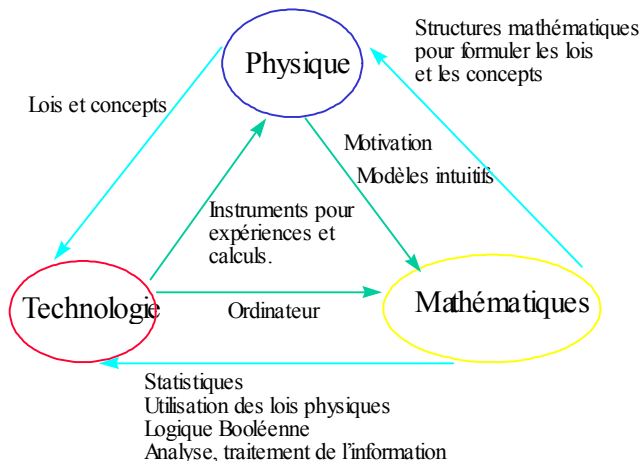


FIGURE 1. Liens schématiques entre mathématiques, physique, technologie.

technologiques. Les mathématiques ont joué un rôle essentiel dans le processus d'élaboration des lois physiques. Nous ne verrons donc qu'une faible portion de ce qu'a été la physique au vingtième siècle. Le récit sera linéaire, chronologique et donc un peu trompeur. Le mouvement de va et vient entre sciences, mathématiques et technologie est continu et leur relation en est une d'interdépendance étroite.

2. Le legs des siècles antérieurs

2.1. Newton et les "particules" : L'idée que les mathématiques peuvent décrire le comportement de l'univers se retrouve déjà chez les grecs, par exemple dans "l'Almageste" de Ptolémée, 150 ans après Jésus-Christ. Cette description est alors géométrique, et bien qu'elle ait un pouvoir prédictif, par exemple pour la date des éclipses, elle ne s'étend pas en dehors de la sphère des astres. C'est avec Newton que l'idée d'une "loi" applicable partout apparaît. Newton doit même développer un nouvel outil mathématique, le calcul différentiel et intégral. Ainsi, étant donné des conditions initiales, ces lois permettent de prédire le mouvement d'une "particule" (un point matériel) dans une situation quelconque. Voici de façon schématique une formulation de ces lois. On prend pour acquis qu'on peut décrire la position d'une particule dans l'espace par un vecteur \mathbf{r} et qu'il existe un temps t absolu.

1. Une particule qui n'est soumise à aucune force poursuit sa route à vitesse $\mathbf{v} \equiv d\mathbf{r}/dt$ constante. (Loi de l'inertie)

Remarque : On a pas besoin ici de définir la force de façon détaillée. Il suffit de dire que les forces que les particules exercent l'une sur l'autre sont associées à la proximité d'autres particules. Et que les forces décroissent lorsque la distance entre les particules augmente.

2. Soit $\mathbf{p} \equiv m\mathbf{v}$ la quantité de mouvement, alors $\mathbf{F} = d\mathbf{p}/dt$. (La force \mathbf{F} gravitationnelle sur une particule de masse m_1 causée par une particule de masse m_2 se calcule de la façon suivante, $\mathbf{F}_1 = -Gm_1m_2\hat{\mathbf{r}}/r^2$ avec $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$ un vecteur de direction $\hat{\mathbf{r}}$ et de grandeur r)
3. Si une particule exerce une force sur une autre particule, celle-ci exerce en retour sur la première une force de grandeur égale mais de direction opposée. (Action = Réaction).

Remarque : Cette loi permet de définir la masse indépendamment de la valeur des forces puisque lorsque deux particules interagissent entre elles, on $m_1/m_2 = (d\mathbf{v}_2/dt) / (d\mathbf{v}_1/dt)$.

Sans calcul différentiel, ces lois ne veulent plus rien dire. Les forces gravitationnelles, électriques et magnétiques sont les forces connues au début du XXème siècle. Ces forces sont “conservatives”, c’est-à-dire que

$$(2.1) \quad - \int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = V(\mathbf{r}_1) - V(\mathbf{r}_2)$$

indépendamment du chemin parcouru pour faire l’intégrale de ligne à gauche de cette équation. La fonction scalaire V est un “potentiel”. Autrement dit, $\mathbf{F} = -\nabla V$. Or, en utilisant la deuxième loi, on peut aussi réécrire \mathbf{F} en fonction d’une dérivée de la vitesse puis intégrer,

$$(2.2) \quad \int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} m \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} \cdot d\mathbf{r} = \int_{dx_1/dt}^{dx_2/dt} m \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} dt =$$

$$(2.3) \quad = \int_{dx_1/dt}^{dx_2/dt} \frac{1}{2} m \frac{d}{dt} \left(\frac{d\mathbf{r}}{dt} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right) dt = \left(\frac{1}{2} m \mathbf{v}_2^2 - \frac{1}{2} m \mathbf{v}_1^2 \right)$$

Comme on peut vérifier en additionnant les deux dernières équations, il existe donc une fonction appelée “énergie” qui est indépendante du temps. Cette fonction est $\frac{1}{2}m\mathbf{v}^2 + V(\mathbf{r})$. Lorsqu’on rajoute les effets de friction, un système mécanique tend à atteindre l’état d’énergie minimale. Ceci demeure un principe général qui survit même dans les théories plus avancées.

Au début du XXème siècle, on considère que la matière est faite de particules “indestructibles” les atomes, qui contiennent entre autres des “électrons” que J.J. Thomson vient de mettre en évidence. Ces particules ont une charge électrique négative. Une charge électrique peut être positive ou négative. La force causée par une particule de charge q_2 au repos sur une particule de charge q_1 au repos se calcule de la façon suivante, $\mathbf{F}_1 = q_1q_2\hat{\mathbf{r}}/r^2$ avec $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$.

2.2. Newton et les ondes : Considérons le problème de masses connectées par des ressorts pouvant se déplacer seulement en une dimension. Les lois de Newton pour le déplacement u_n de la masse n par rapport à sa position d’équilibre nous donnent

$$(2.4) \quad m \frac{d^2u_n}{dt^2} = -K(u_n - u_{n+1}) - K(u_n - u_{n-1})$$

Lorsqu’on passe à la limite où les masses sont très près l’une de l’autre, on reconnaît à droite l’expression pour une “deuxième” différence. On peut prendre la limite d’une corde continue de la façon suivante. Si a est la distance entre les masses à l’équilibre, on note $x = an$ la position d’équilibre de la masse n et on définit



FIGURE 2. Divers phénomènes ondulatoires. À gauche, les ondes stationnaires, et à droite l'interférence. Au centre en haut, on illustre le phénomène de diffraction et en bas au centre on montre celui des ondes évanescentes qui permettent la propagation malgré la présence d'un milieu défavorable.

$\rho = m/a$ la densité de masse et $\kappa = Ka$ la rigidité. Alors, avec $\psi(x, t) = u_n(t)$ on obtient

$$(2.5) \quad \rho \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = \kappa \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}$$

La fonction ψ est un exemple simple de ce qu'on appelle un champ. Elle obéit à ce qu'on appelle une équation d'onde. Les solutions générales sont des superpositions de fonctions de la forme

$$(2.6) \quad \psi(x, t) = (A_1 e^{ikx} + A_2 e^{-ikx}) (B_1 e^{i\omega t} + B_2 e^{-i\omega t})$$

Dans cette équation, $i = \sqrt{-1}$ et $\omega/k = \sqrt{\kappa/\rho} = c$, où c est la vitesse à laquelle une perturbation décrite par ψ se propage. Les constantes A_1 , A_2 , B_1 et B_2 sont des déterminées par les conditions aux limites et les conditions initiales. Bien que ω/k seulement soit fixé par l'équation d'onde, la valeur de k peut dépendre des conditions limites, tel que discuté ci-dessous de façon imagée.

En effet, une des propriétés intéressantes des ondes est illustrée à gauche de la figure 2. Si on pince une corde de guitare, une onde dite stationnaire s'installera. La fréquence d'oscillation la plus basse sera donnée par c/λ où λ est deux fois la distance entre les points d'attache de la corde. On parle de fréquence propre et de mode propre. En généralisant la notion d'onde aux dimensions plus élevées, on trouve que les "ondes" ont les autres propriétés illustrées à la figure 2. Il suffit d'avoir lancé des pierres sur la surface d'un lac calme et d'avoir noté attentivement les propriétés des vagues pour accepter sans trop de difficulté que les ondes ont ces propriétés. Si une onde plane passe par une ouverture, elle subit de la diffraction, tel qu'illustré à la portion du haut au centre de la figure. Si une onde plane passe par deux ouvertures à la fois, les deux ondes diffractées interféreront, tel qu'illustré à droite. La dernière propriété, un peu moins familière, est illustrée au milieu de la figure, en bas. Supposons qu'à un endroit, l'eau soit remplacée par un autre

matériau aux propriétés tellement différentes de celles de l'eau, que le coefficient du membre de droite de l'équation d'onde (2.5) devienne négatif dans la région du matériau. Les solutions dans le matériau seront alors des exponentielles qui s'atténuent plutôt que des fonctions oscillantes. On parle alors d'une onde évanescente. En raccordant les fonctions ψ des deux côtés du matériau, on voit qu'il y a toujours une onde qui réussit à se propager de l'autre côté. Évidemment, si le matériau est très épais par rapport à la distance d'atténuation de l'exponentielle, l'intensité transmise devient négligeable.

2.3. Maxwell, Einstein, Poincaré, Lorentz et les ondes. Dans ce qui précède, il est clair que l'onde représente la déformation, la vibration, d'un milieu qui la supporte. Ainsi, Maxwell explique la lumière (et du même coup les ondes radio, infrarouges, ultraviolettes etc..) par la propagation du champ électromagnétique. On suppose que ce champ représente la déformation d'un milieu qu'on appelle l'éther. Qu'on ne parvient pas à observer expérimentalement. Les conséquences sont profondes. La vitesse de la lumière est la même dans tous les systèmes de coordonnées qui se propagent à vitesse constante l'un par rapport à l'autre. La quantité $\Delta \mathbf{r}^2 - c^2 \Delta t^2$, où $\Delta \mathbf{r}$ et Δt sont respectivement les intervalles d'espace et de temps mesurés entre deux événements, prend la même valeur dans tous les systèmes de référence qui se déplacent à vitesse constante l'un par rapport à l'autre. Un changement de système de référence qui laisse $\Delta \mathbf{r}^2 - c^2 \Delta t^2$ invariant correspond à une rotation généralisée, donc temps et espace n'ont plus de signification séparée, ils peuvent se transformer l'un dans l'autre. Ils ne sont que les composantes d'un quadrivecteur. Nous sommes au début du siècle. La théorie de la relativité d'Einstein est née. Mais c'est une autre histoire.

3. L'algèbre linéaire à la rescousse : la mécanique quantique

3.1. Onde ou particule? La matière en ce début de XXème siècle se présente donc sous deux formes différentes, particule lorsqu'on parle d'électrons par exemple, ou onde, lorsqu'on parle de lumière. Nous savons aujourd'hui que l'un et l'autre de ces modèles ne sont qu'approximatifs, ne décrivant jamais exactement la matière. Le fils de J.J. Thomson, celui qui a découvert que l'électron est une particule, a partagé un prix Nobel pour avoir démontré expérimentalement que dans certaines circonstances l'électron a les propriétés d'une onde. Sans entrer dans tous les détails et toutes les controverses historiques, voici comment la matière se comporte. L'électron et le photon et *toutes* les autres particules ont le même comportement.

Supposons qu'on répète l'expérience illustrée à droite de la figure 2. Dans cette expérience, on lance des électrons à partir d'une source pas très précise, située



FIGURE 3. Intensité recueillie sur l'écran dans l'expérience d'interférence des deux fentes. L'intensité est maximale au centre.

à gauche de la figure, qui tire en gros vers la droite de la figure. Les électrons passent par l'une ou l'autre des ouvertures pratiquées dans un écran puis vont se fixer dans des détecteurs qui couvrent le mur d'en face. Si l'électron était une particule, il passerait par l'un ou l'autre des deux trous de l'écran et irait se fixer dans le détecteur d'en face. En répétant l'expérience plusieurs fois, on trouverait que les électrons se sont ramassés en deux paquets situés en face de chacun des trous. Supposons qu'on bouche un des trous et qu'on fasse l'expérience, puis ensuite qu'on bouche plutôt l'autre trou et qu'on refasse l'expérience. La distribution N_{12} des électrons dans le détecteur à la fin serait la même, soit $N_1 + N_2$, la somme des distributions N_1 et N_2 obtenues lorsque, respectivement, seulement le trou 1 ou seulement le trou 2 est ouvert.

Si l'électron était une onde, les choses seraient très différentes. On trouverait plutôt sur l'écran le patron d'interférence illustré à la figure 3. Il y aurait plus d'électrons là où les ondes sont maximum. Dans le cas où un des deux trous est bouché, on retrouverait un résultat qui ressemble au cas des particules, c'est-à-dire une intensité maximale vis-à-vis le trou ouvert. Dans ce cas, la distribution avec les deux trous ouverts I_{12} n'est pas égale à la somme des distributions $I_1 + I_2$ avec un seul trou ouvert.

Que se passe-t-il en réalité lorsqu'on fait l'expérience, que ce soit avec la lumière, ou avec les électrons. Si on fait l'expérience à très faible intensité, avec les deux trous ouverts, le détecteur fera clic, clic, c'est-à-dire qu'il notera l'arrivée individuelle des électrons, ou des particules de lumière, les photons. Jusque là nous sommes confortables. Le problème survient lorsqu'on regarde la distribution recueillie par les détecteurs après plusieurs essais. On trouve le patron d'interférence I_{12} comme si les électrons étaient une onde. Cette discussion est résumée au tableau ci-dessous

Particules	Ondes	Électrons, photons, ...
Paquets	Amplitude quelconque	Paquets
Mesure probabilité d'arrivée	Mesure Intensité de l'onde	Mesure probabilité d'arrivée
$N_2 = N_1 + N_2$	$I_{12} \neq I_1 + I_2$	$N_2 \neq N_1 + N_2$
Pas d'interférence	Interférence	Interférence

FIGURE 4

Les deux premières propriétés de l'expérience avec les électrons les font ressembler à des particules. Les deux dernières à des ondes.

3.2. La mécanique quantique. Les postulats suivants sont à la base de la mécanique quantique, théorie qui "explique" le comportement bizarre que nous

avons décrit plus haut. Nous appellerons les objets quantiques des particules, même si elles n'obéissent plus aux notions intuitives de particule.

1. L'état d'une particule est représenté par un vecteur $|\psi(t)\rangle$ dans un espace de Hilbert. (Un espace de Hilbert a les propriétés suivantes (sommairement): (a) il est linéaire (b) il est muni d'un produit hermitique $\langle\psi|\phi\rangle$ (ou produit bilinéaire) définissant une norme définie positive (c) il est complet) (Un produit hermitique prend des valeurs sur les complexes et a les propriétés suivantes (a) $\langle\psi|\phi_1 + \phi_2\rangle = \langle\psi|\phi_1\rangle + \langle\psi|\phi_2\rangle$ (b) $\langle\psi|c\phi_1\rangle = c\langle\psi|\phi_1\rangle$ pour c un complexe et (c) $\langle\psi|\phi_1\rangle = \langle\phi_1|\psi\rangle^*$ où $*$ veut dire complexe conjugué.)
2. Les quantités physiquement observables sont représentées par des opérateurs hermitiques, c'est-à-dire des opérateurs O tels que $\langle\psi|O\phi\rangle = \langle O\psi|\phi\rangle$. En général ces opérateurs ne commutent pas. L'opérateur associé à la position et celui associé à la quantité de mouvement obéissent aux relations de commutation

$$(3.1) \quad [\mathbf{r}_\alpha, \mathbf{p}_\beta] = i\hbar\delta_{\alpha,\beta}$$

où $i = \sqrt{-1}$, $[A, B] \equiv AB - BA$, les indices grecs représentent les composantes cartésiennes, $\delta_{\alpha,\beta} = 1$ ssi $\alpha = \beta$ et $\delta_{\alpha,\beta} = 0$ ssi $\alpha \neq \beta$ alors que \hbar est une constante de la nature (constante de Planck divisée par 2π).

3. Soient $|\gamma\rangle$ les états propres d'une observable Γ (i.e., $\Gamma|\gamma\rangle = \gamma|\gamma\rangle$). Une mesure expérimentale de Γ lorsqu'un système est dans l'état $|\psi\rangle$ donnera la valeur γ avec une probabilité $|\langle\gamma|\psi\rangle|^2 / |\langle\psi|\psi\rangle|^2$. L'état du système changera alors de $|\psi\rangle$ à $|\gamma\rangle$ suite à la mesure.
4. Le vecteur d'état d'un système obéit à l'équation

$$(3.2) \quad i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi(t)\rangle = H |\psi(t)\rangle$$

où H est l'hamiltonien du système (En général égal à la fonction énergie que nous avons rencontrée à la fin de notre discussion de la mécanique de Newton).

5. Les postulats précédents nous donnent que la probabilité que N particules se trouvent aux positions \mathbf{r}_1 à \mathbf{r}_N s'obtient à partir du module de la fonction, dite fonction d'onde, $\langle\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N|\psi\rangle$. Le postulat additionnel que nous discutons ici nous dit qu'il n'existe que deux sortes de particules, les fermions et les bosons. Pour N fermions identiques, $\langle\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N|\psi\rangle$ est une fonction complètement antisymétrique sous échange des positions, i.e. $\langle\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_i, \dots, \mathbf{r}_j, \dots, \mathbf{r}_N|\psi\rangle = -\langle\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_j, \dots, \mathbf{r}_i, \dots, \mathbf{r}_N|\psi\rangle$. Ceci implique en particulier que deux fermions identiques ne peuvent occuper la même position $\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_j$. Dans le cas de N bosons identiques, la fonction d'onde est complètement symétrique sous échange des positions.

Les électrons sont des fermions, les photons sont des bosons. Comment retrouve-t-on le comportement classique des objets de tous les jours? Lorsque la longueur d'onde est très petite par rapport à la taille des objets environnants, les effets de diffraction deviennent négligeables, les paquets d'onde se propagent essentiellement comme des particules. Et lorsque la distance entre les particules est grande par rapport aux longueurs d'ondes, les effets d'interférence aussi deviennent négligeables. La revue Nature du 14 octobre 1999 vient de rapporter de l'interférence entre des molécules de carbone ayant la forme d'un ballon de soccer fait de 60 atomes.

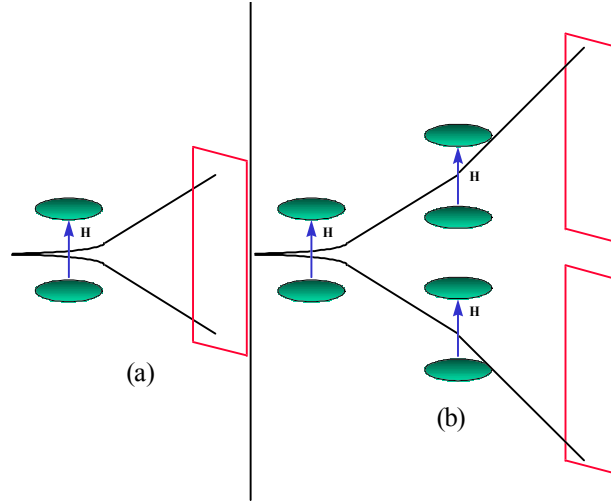


FIGURE 5. Expérience de Stern-Gerlach

3.3. Un exemple de comportement quantique étonnant (spin). La figure 5(a) illustre l'expérience dite de Stern-Gerlach. On passe des atomes d'argent dans un champ magnétique inhomogène. À la sortie, les atomes se retrouvent à seulement deux points sur un écran placé au loin. L'état de ces atomes peut donc être décrit par un vecteur pouvant prendre deux valeurs, selon l'endroit où l'atome arrive sur l'écran

$$(3.3) \quad |\uparrow\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad |\downarrow\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

L'opérateur qui est mesuré par cette expérience est simplement relié à l'orientation de l'aimantation de l'atome. Appelons cet opérateur σ_z . On peut représenter σ_z de la façon suivante:

$$(3.4) \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Il est facile de voir que les deux vecteurs $|\uparrow\rangle$ et $|\downarrow\rangle$ sont les états propres de cet opérateur et qu'ils ont les valeurs propres ± 1 . Pour vérifier qu'une mesure du vecteur d'état laisse le système dans l'état propre correspondant, on peut vérifier que si on refait passer le faisceau qui était dirigé vers le haut dans un appareil identique, il n'y aura qu'un faisceau d'atomes qui sortira du deuxième appareil et ce faisceau ira vers le haut, tel qu'illustré à la 5(b). Réciproquement, le faisceau du bas sera dévié seulement vers le bas à la sortie du deuxième appareil.

Tournons maintenant de 90° les appareils de deuxième ligne. En d'autres mots, si le premier appareil était dans la direction z , les appareils de deuxième ligne sont maintenant dans la direction \hat{x} . Une rotation de l'opérateur σ_z s'effectue à l'aide du groupe de rotation $SU(2)$. On trouve que l'opérateur σ_x prend la forme

$$(3.5) \quad \sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Il est facile de vérifier que ses états propres, normalisés, sont

$$(3.6) \quad \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right] \quad \text{et} \quad \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right]$$

de valeur propre respectivement $+1$ et -1 . Considérons l'état du système sorti du premier aimant en allant vers le haut. On sait que son état est $|\uparrow\rangle$. La probabilité de mesurer que l'aimantation est orientée dans la direction $\hat{\mathbf{x}}$ est donnée par

$$(3.7) \quad \left| \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right] \right|^2 = \frac{1}{2}$$

On trouve évidemment la même probabilité pour l'autre orientation $-\hat{\mathbf{x}}$. Expérimentalement, on vérifie qu'effectivement, au sortir d'un aimant orienté dans la direction $+\hat{\mathbf{x}}$, le faisceau d'atomes se divise de nouveau en deux.

Cette propriété des atomes d'argent n'est qu'un reflet du fait que leur aimantation vient des états $|\uparrow\rangle$ et $|\downarrow\rangle$ des électrons. Il n'y a que deux valeurs possibles de cette orientation.

3.4. Le tableau périodique. Les atomes sont formés de noyaux chargés électriquement qui sont très lourds par rapport aux électrons. Ces derniers occupent des états propres de l'hamiltonien. On appelle ces états propres "niveaux d'énergie". Le principe d'antisymétrisation pour les fermions nous dit que deux électrons ne peuvent pas occuper le même état à une particule (ceci se nomme aussi le principe de Pauli). Le tableau périodique s'explique donc simplement en remplissant successivement les états propres des électrons correspondant à des noyaux de charge de plus en plus élevée. Ces états propres, ou niveaux d'énergie, sont comme les ondes stationnaires de la corde utilisée comme exemple dans la section sur Newton et les ondes. On peut mettre un électron d'aimantation (spin) $|\uparrow\rangle$ et un d'aimantation $|\downarrow\rangle$ par niveau d'énergie.

4. Les trous et les transistors

4.1. Conduction dans les solides. Si on dispose plusieurs atomes ensemble, près l'un de l'autre, on obtient un solide. Certains solides, comme les métaux, laissent passer les électrons sans problème. D'autres, comme les céramiques, ne permettent pas aux électrons de bien passer. Ce sont des matériaux isolants. Pourquoi ces comportements si différents? À priori, les images classiques nous suggèrent que les électrons devraient frapper sans cesse les noyaux et ne devraient pas pouvoir traverser les solides aussi facilement qu'ils le font dans les métaux. La mécanique quantique vient à notre rescousse. La partie gauche des figures 6(a) et (b) illustre les niveaux d'énergie d'atomes identiques placés l'un à côté de l'autre. Chaque électron, occupant les différents niveaux d'énergie, est représenté par une flèche qui indique la direction de son spin. Dans la partie gauche de la figure, les atomes sont encore loin l'un de l'autre et dans la partie droite ils sont proches, comme dans un solide. Dans le cas (a), il n'y a qu'un électron par atome dans le dernier niveau occupé alors que dans le cas (b) il y en a deux dans le dernier niveau occupé. À mesure qu'on rapproche les atomes, les interactions font que les niveaux d'énergie changent, tout en restant groupés autour des valeurs atomiques de départ. L'hamiltonien est invariant sous translation, c'est-à-dire identique si on déplace tous les atomes d'un réseau, présumé infini, d'une distance égale à la distance entre les atomes. Donc, les nouveaux états propres sont des états propres étendus dans tout le solide. On peut

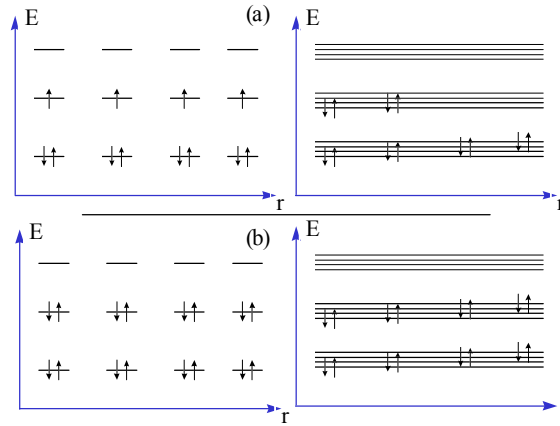


FIGURE 6. Niveaux d'énergie d'atomes éloignés à gauche et rapprochés (solide) à droite. La situation (a) correspond à un métal et (b) à un isolant

classifier ces nouveaux niveaux d'énergie par la quantité de mouvement qui leur est associée. Plus l'énergie d'un niveau est grande, plus sa quantité de mouvement est grande. Remplissons ces niveaux d'énergie à partir de l'énergie la plus basse en y mettant tous les électrons qui étaient au départ présents dans les atomes. Lorsqu'on rajoute un électron ayant une certaine quantité de mouvement, disons vers la droite, l'électron suivant de même spin remplira un autre niveau d'énergie de quantité de mouvement vers la gauche. Lorsqu'on aura terminé, il n'y aura aucun mouvement net des électrons. Il y en aura autant dont la vitesse sera vers la gauche que vers la droite. Cependant, dans la situation illustrée à droite de la figure 6(a), il suffit de très peu d'énergie pour faire passer un électron occupant le niveau d'énergie le plus élevé à un autre niveau d'énergie encore plus élevé et donc de quantité de mouvement plus élevée. En appliquant une petite force électrique, il sera donc facile de générer un courant net d'électrons. On a un métal. Dans la situation à droite de la figure 6(b) cependant, le système est isolant. En effet, les niveaux d'énergie inoccupés sont séparés des niveaux occupés par une bande d'énergie interdite. Il faut beaucoup d'énergie pour faire passer l'électron du dernier niveau d'énergie occupé au premier état inoccupé.

Prenons maintenant un isolant (silicium en pratique) et rajoutons-y des atomes d'une autre sorte, qu'on appelle impuretés. Il y a deux grands types possibles d'impuretés. Les impuretés qui rajoutent des électrons et des niveaux d'énergie près des niveaux inoccupés du silicium (le phosphore par exemple). S'il y a suffisamment de ces impuretés nous retrouvons un métal, tel qu'illustré à la figure 7(a). Dans cette figure et les suivantes, on représente les niveaux d'énergie occupés par une région foncée et les niveaux vides par une région grise. Le niveau d'énergie le plus élevé qui est occupé est représenté par une ligne hachurée. Dans le cas de la figure 7(a), les électrons, chargés négativement, transportent le courant puisqu'il faut peu d'énergie pour les mettre dans des niveaux vides. Le deuxième type d'impuretés rajoute des niveaux d'énergie inoccupés près des derniers niveaux occupés, comme à

la figure 7(b). En appliquant une force électrique, les électrons peuvent sauter dans ces niveaux inoccupés, mais comme ceux-ci correspondent à des états propres liés autour de l'impureté ils ne contribuent pas directement au transport de courant. Par contre, en sautant sur l'impureté, l'électron laisse un "trou" c'est-à-dire un niveau d'énergie du silicium inoccupé. Sous l'influence d'une force électrique, ce "trou" se déplace comme s'il avait une charge opposée à celle de l'électron. Intuitivement, en remplissant un trou situé à sa droite, un électron laisse derrière un trou. L'effet net est que le trou s'est déplacé vers la gauche, c'est-à-dire dans le sens contraire de l'électron, comme si leur charge était positive.

Donc, selon le type d'impureté mis dans le silicium, il est possible de le rendre métallique de type n , c'est-à-dire contenant des électrons, chargés négativement, qui peuvent transporter le courant. On peut aussi le rendre métallique de type p , c'est-à-dire avec des porteurs de courant qui agissent comme s'ils étaient chargés positivement.

4.2. Le transistor. La figure 8(a) illustre ce qui se passe si on met un morceau de silicium de type n , à gauche, en contact avec un morceau de silicium de type p , à droite. Les électrons du morceau de type n se précipiteront dans les niveaux d'énergie vide du type p jusqu'à ce que le manque de charge à gauche et l'excès de charge à droite empêche ce transfert de charge de continuer à se poursuivre. Ceci se produira éventuellement parce que les charges de même signe se repoussent. Il y aura une région à l'interface où existera une grande force électrique tendant à repousser vers la gauche les électrons qui s'y trouvent. Les niveaux d'énergie auront la forme indiquée à la 8(b).

La structure illustrée à la figure 8 ne passe le courant facilement que dans une direction. En effet, supposons qu'on rajoute des électrons dans la partie n et qu'on en enlève dans la partie p . (Ceci peut se faire facilement en branchant le côté négatif d'une pile sur la partie n , et le côté positif de la même pile sur la partie p de notre structure). Alors le phénomène que nous avons décrit lorsqu'on met les morceaux n et p en contact reprendra. Les électrons passeront du côté n au côté p parce

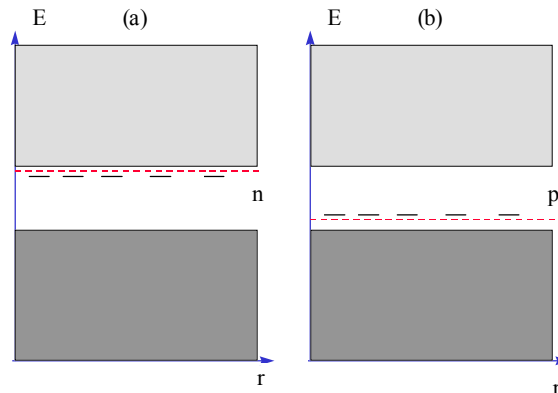


FIGURE 7. Effet des impuretés sur les niveaux d'énergie du silicium. Impuretés de type n en (a) et de type p en (b).

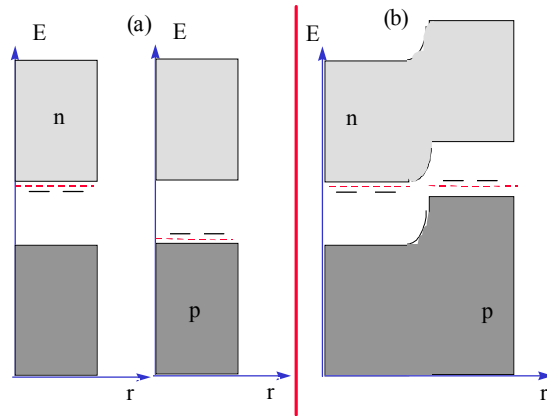


FIGURE 8. Deux semi-conducteurs de type différents (a) sont mis en contact en (b) pour former une jonction $p - n$

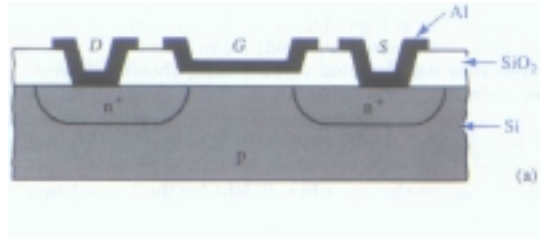


FIGURE 9. Shéma d'un transistor de type MOSFET. Tiré de *Solid State Electronic Devices* par Ben G. Streetman, (Prentice Hall, Englewood Cliffs, 1995).

qu'à chaque fois qu'on enlève un électron du côté p , on crée un trou qui pourra être rempli par un électron venant du côté n . Si on essaie de passer des électrons dans l'autre sens, du côté p au côté n , cela ne marchera pas très bien puisqu'en enlevant des électrons du côté n et en rajoutant du côté p , on renforce la force électrique décrite au paragraphe précédent. C'est cette force qui finalement empêchait les électrons de circuler.

Considérons maintenant la structure illustrée à la figure 9. Seules les régions marquées n , p ou Al (aluminium) sont conductrices. Il est impossible de faire passer du courant du point S (source) au point D (drain), puisque le courant ira toujours dans le mauvais sens pour une des deux interfaces $n - p$. Maintenant, supposons qu'on enlève des électrons de la section marquée G (gate) (avec une pile par exemple). Les électrons seront attirés vers l'interface entre la région grise conductrice et la couche blanche isolante. On créera alors un mince canal de charges négatives qui connectera directement les deux parties n ensemble. On a créé une "couche d'inversion". Il suffit de très peu d'électrons dans la région G pour faire passer le canal d'isolant à bon conducteur. Ceci s'appelle le transistor ("transfer resistor") à effet de champ (MOSFET: Metal Oxide Field Effect Transistor). Le

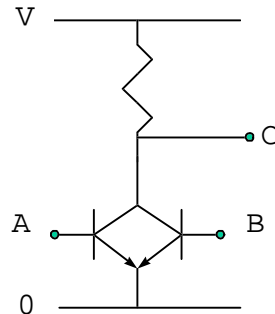


FIGURE 10. Une porte logique NOR faite à l'aide de transistors

transistor sert d'amplificateur dans la plupart des circuits de radio, de télévision ou dans la haute fidélité. Mais il a d'autres utilités.

4.3. Une porte logique. La figure 10 illustre une porte logique NOR (non-ou). Les structures à trois pattes représentent des transistors. Les points A et B correspondent au point G (figure 9) du transistor correspondant. Supposons que l'on amène des électrons (ON) au point A ou au point B ou aux deux à la fois. Le courant pourra alors circuler entre le point C et le bas du circuit (Le point C sera OFF). C'est seulement lorsque les deux, A et B sont au repos (OFF) qu'il n'y a pas de courant qui passe entre le point C et le bas du circuit (Le point C est alors ON). C'est la fonction logique non-ou.

4.4. Une révolution. Une version un peu différente du transistor basé sur cette physique a été inventée aux États-Unis à Bell Labs vers 1947 par Bardeen, Brattain et Shockley. En 1958, Kilby chez Texas Instruments a trouvé comment ajouter toutes les autres composantes nécessaires au fonctionnement d'un circuit électrique sur la même plaque de silicium. C'était la naissance du circuit intégré. À l'aide de masques et de techniques photographiques, on peut cacher différentes régions du silicium pendant que les autres sont exposées à des impuretés. Ainsi, on crée différentes régions de type n ou de type p et on dépose différentes couches d'isolant ou de métal, comme le permet la configuration MOSFET illustrée à la figure 9. La taille des masques peut être réduite avec des lentilles, comme en photographie. Ce sont les principes de base de la technique dite de lithographie qui permet de réduire la taille des circuits et d'en mettre de plus en plus au même endroit. Le circuit électronique qui jouait le rôle du transistor dans les premiers ordinateurs électroniques était le tube à vide. Un tube à vide occupait de l'ordre d'un cm^2 de surface. Aujourd'hui, dans un Pentium, on met environ 5×10^6 transistors sur la même surface. Un téléphone cellulaire serait aussi gros que le monument de Washington s'il était fait de tube à vide. Votre calculatrice de poche serait de la taille d'une pièce au complet. Il est clair que notre monde serait différent.

Depuis 30 ans, les compagnies d'électronique augmentent le nombre de transistors occupant une surface donnée par un facteur deux tous les 18 mois environ. C'est ce qu'on appelle la loi de Moore. À ce rythme, nous nous rapprochons de circuits

qui auront la taille de quelques atomes seulement. Avant d'atteindre cette limite, la longueur d'onde des électrons deviendra comparable aux tailles des circuits, ce qui produira des phénomènes d'interférence indésirables pour leur fonctionnement.

Tout ce que j'ai dit passe sous silence le laser. Celui-ci est basé sur un autre principe de la mécanique quantique. Le photon est un boson. Il est donc possible d'en mettre plusieurs dans le même état quantique. C'est ce qui se passe dans le laser. La fréquence élevée de la lumière (environ $10^{14} Hz$) en fait une porteuse idéale. Il est possible d'y encoder énormément d'information. C'est la raison pour laquelle on pose actuellement environ 2000 km de fibre optique à l'heure dans le monde.

Du côté des nouveaux instruments scientifiques, l'avènement du microscope à effet tunnel est une autre petite révolution. L'effet tunnel c'est simplement la transposition en mécanique quantique du phénomène des ondes évanescentes que j'ai décrites au bas du milieu de la figure 2. Un électron peut sauter directement d'un atome à la pointe d'une sonde dans le vide, même s'il n'y a pas de contact. Ce type de système permet de voir les matériaux à l'échelle atomique ou moléculaire. À cette échelle, on peut "voir" les molécules d'intérêt biologique.

5. Propriétés émergentes

Plusieurs phénomènes fascinants sont le résultat de comportements collectifs de la matière. Que veut-on dire par là? Parfois, les propriétés macroscopiques des corps sont le résultat d'interactions fortes entre les particules. Considérons par exemple le magnétisme. C'est une propriété de la matière qui donne lieu à des applications importantes, comme tout le monde qui utilise une carte de crédit ou un disque dur d'ordinateur le sait. Or, le magnétisme est le résultat d'interactions fortes entre les électrons, combiné au principe de Pauli, qui fait que les électrons ont tendance à orienter tous leurs spins dans la même direction. Dans ce genre de problème, les mathématiques jouent aussi un rôle majeur. Elles ont contribué à développer le concept de renormalisation. On peut montrer que lorsque l'effet des interactions se manifeste sur de grandes distances, il est préférable de laisser tomber certaines variables qui décrivent le système de départ pour plutôt travailler avec un modèle effectif représentant des variables collectives. C'est la renormalisation. Sous renormalisation, le modèle effectif peut rester semblable au modèle de départ ou bien développer de nouvelles propriétés qui n'étaient pas apparentes dans le modèle de départ. On parle de propriétés émergentes. Il est important de noter que les mathématiques seules ne permettent pas toujours de trouver les propriétés émergentes. Il est souvent nécessaire de postuler un modèle. Autrement dit, le chemin déductif qui mène en principe des lois fondamentales au monde macroscopique est souvent inaccessible à l'esprit humain.

Un exemple de propriété émergente est l'effet Josephson. Lorsqu'on descend la température d'un matériau, il devient parfois supraconducteur, c'est-à-dire qu'il conduit l'électricité sans résistance. Lorsqu'on met deux supraconducteurs près l'un de l'autre et qu'on applique une différence de potentiel à l'aide d'une pile, il se produit un effet tunnel qui donne un courant alternatif de fréquence angulaire $2eV/\hbar$ où V est le "voltage", e la charge de l'électron et \hbar est la constante que nous avons rencontrée plus haut. Cet effet est utilisé aujourd'hui entre autre pour définir l'étalon pour le Volt et pour construire des détecteurs de champ magnétique d'une très grande précision.

6. Un peu de prospective

Pour faire basculer un transistor moderne de l'état 0 à l'état 1, il faut environ 1000 électrons. On construit déjà en laboratoire des transistors à un électron. À mesure que la taille des circuits électroniques diminue, les effets d'interférence quantique deviennent de plus en plus importants. On a donc proposé des dispositifs qui peuvent fonctionner en utilisant à leur avantage les effets d'interférence. On travaille aussi à la mise au point d'ordinateurs quantiques, c'est-à-dire d'ordinateurs dont les composants sont dans des états quantiques purs. L'avantage potentiel de ces systèmes peut s'illustrer simplement en considérant un état quantique $|\Psi\rangle = a_1 |\psi_1\rangle + a_2 |\psi_2\rangle + a_3 |\psi_3\rangle$. Lorsque l'état $|\psi\rangle$ évolue dans le temps, en fait chacun des états $|\psi_i\rangle$ évolue. C'est comme si on faisait en parallèle les calculs sur tous les états $|\psi_i\rangle$ à la fois. Des algorithmes ont été suggérés qui rendraient inopérantes les méthodes d'encryption présentement utilisées dans les échanges électroniques si on parvenait à construire un ordinateur quantique.

C'est un exercice un peu futile d'essayer de prévenir l'avenir. Mais il semble certain que le contrôle de la matière à une échelle de plus en plus fine mènera à des progrès remarquables tant du point de vue scientifique que technologique. Dans cet exposé, j'ai essayé d'illustrer le fait que les mathématiques ont été essentielles en physique, non seulement dans la formulation de lois, mais aussi au niveau de la définition de concepts qui sont à la base du développement de nouvelles technologies. On peut penser que ce phénomène ira en s'amplifiant.

Je remercie David Sénéchal pour les discussions que nous avons eues sur plusieurs sujets abordés ici.

References

- [1] Richard Feynman, *The Character of Physical Law*, (M.I.T Press, Cambridge, 1965)
- [2] Curt Supplee, *Physics in the 20th Century*, (Harry N. Abrams Inc., 1999)
- [3] *Condensed Matter and Materials Physics* (National Research Council, Washington, 1999)

DÉPARTEMENT DE PHYSIQUE, CENTRE DE RECHERCHE SUR LES PROPRIÉTÉS ÉLECTRONIQUES DE MATÉRIAUX AVANCÉS ET INSTITUT CANADIEN DE RECHERCHES AVANCÉES, UNIVERSITÉ DE SHERBROOKE, SHERBROOKE, QUÉBEC, J1K 2R1

E-mail address: tremblay@physique.usherb.ca

URL: <http://www.physique.usherb.ca/~tremblay>